第 1 回和田杯

灘校数学研究部

第 68 回文化祭（2014 年 5 月 2 日〜3 日）

懸賞あり!!

数研の新企画です!! ほとんどの問題は高校で習う程度の数学を押さえていれば解くことができます. 大学で学ぶ数学の知識が必要な問題は問題番号に ⋆ 印を付けています. もちろん時間は無制限. じっくり考えて下さい! 質問, 答え合わせ等はお気軽に受付までどうぞ. 証明問題が解けた方は, 受付で口頭で説明して下されば, 部員がその正誤を判定致します.

1. $x^2 + xy + y^2 = n$ を満たす整数の組 (x, y) の個数が 3 で割り切れるが 4 で割り切れないような整数 n をすべて求めよ.

2. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(x+y) \geq xf(1+y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

3. k, m, n を正の整数とする. 成分が非負整数である $m \times k$ 行列であって, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$ なる任意の整数 i, j に対し, その第 i 行にある成分の和が kn であり, 第 j 列にある成分の和が mn であるようなもの全体の集合を M とおく.

$$\sum_{(x_{ij}) \in M} \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq k}} x_{ij}!} = \frac{(kmn)!}{((kn)!)^m((mn)!)^k}$$

が成り立つことを示せ. ただし (x_{ij}) は (i, j) 成分が x_{ij} である行列を表す.

4. 三角形 ABC において辺 BC,CA,AB の中点を各々 D,E,F とする. 三角形 ABC,DEF の外接円を各々 Ω, ω とし, ω の中心を O とする. また Ω に接し ω とも D,E,F で外接する円を各々 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ とし, それらと Ω との接点を各々 K, L, M とする. O, K, D

が一直線上になく, 同じく O, L, E と O, M, F もそれぞれ一直線上にないとき, 三角形 OKD, OLE, OMF の外接円及び三角形 ABC のオイラー線は O でないある 1 点を共有することを示せ. ただし三角形のオイラー線とは, その外心及び垂心を通る直線である.

*5. 以下では正の整数全体の集合を $\mathbb{Z}^+$ と書く.

(1) f, g, h は任意の正の整数に対して以下のように定義される関数である:

$$f(n) := \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \right\rfloor$$

$$g(n) := f(n) - 1$$

$$h(n) := f(n)^2 - 2n + 1.$$

ただし実数 x に対し $\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数を表す. また, $\mathbb{Z}^+$ 上の演算 $*$ を, $a, b \in \mathbb{Z}^+$ に対して

$$a * b := \frac{1}{8}\Big\{(g(a)g(b) + h(a)h(b) + 1)^2 + 2\,(g(a) - h(a))\,(g(b) - h(b)) + 7\Big\}$$

により定める. このとき 2014 以下の正の整数 n で $n = a * b$ を満たす正の整数の組 (a, b) が無限個存在するものはいくつあるか. またその組の個数が有限個のとき, その組の個数の最大値を求めよ.

(2) $\mathbb{Z}^+$ において次の条件を満たす演算 $\circ$ を考える. この $\circ$ は $Y = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | 0 \leq x \leq y\}$ としたとき, Y の任意の元 $(k, n), (l, m)$ について

$$(kn!+1)\circ(lm!+1) = \begin{cases} kn! + lm! + 1 & (n < m \text{ または } n - k > m \text{ のとき}) \\ kn! + l(m-1)! + 1 & (n \geq m \geq m - l > n - k \text{ のとき}) \\ (k-1)n! + (l-1)(m-1)! + 1 & (n \geq m > n - k \geq m - l \text{ のとき}) \\ (k+l)n! + 1 & (n - k = m \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たし, かつ Y の任意の元 (k, n) と任意の正整数 N について, $(N, n!) \in Y$ ならば $N \circ (kn! + 1) = N + kn!$ を満たす. 更に $\circ$ が結合法則をみたすなら, この条件を満たす $\circ$ は唯一つ存在し, $\mathbb{Z}^+$ は $\circ$ により群をなすことを示せ. また 2 以上かつ高々可算である任意の濃度について, その濃度を持つ $\circ$ に関する $\mathbb{Z}^+$ の部分群が無限に多く存在することを示せ.

6. n を正の奇数とする.

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{k\pi}{n}$$

の値を求めよ.

7. $AB > AC$ なる三角形 ABC があり, その内心を I, 外心を O, 内接円, 外接円の半径を各々 r, R とする. 三角形 ABC の内接円が AB と点 D で, AC と点 E で接していて, BC と DE が点 X で交わっている. 点 Y を $EY : YX = AD : DB$ なる線分 EX 上の点とするとき, 内積 $\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IY}$ の値を r, R を用いて表せ.

*8. R を環 (加法及び乗法が定義された代数系であって, 加法に関してアーベル群であり, また乗法の結合法則と分配法則を満たすもの) とする. R の任意の元 x が $x^7 = x$ を満たすならば R は可換であることを示せ.

9. $f(x) = \sqrt{2}i(x^2+1)$ とおく.

$$\prod_{n=1}^{2014} f^n(x) = 2^{-2014}$$

を満たす複素数 x をすべて求めよ. ただし f^n で f の n 回合成写像を表す. すなわち $f^1(x) = f(x)$ であり, 任意の正整数 n に対し $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ である.

10. 実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数を表す. 次の値を求めよ:

$$\sum_{q=0}^{2014} (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} {}_{2014-q+\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}C_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} 2014^{-q}.$$

11. 二等辺三角形でない三角形 ABC があり, その外心を O, 三角形 OBC の外接円と直線 AB, AC との交点をそれぞれ D, E (ただし $D \neq B, E \neq C$) とし, 線分 DE の中点を M とする. 二直線 DE, BC の交点から直線 AM へ下ろした垂線の足を H とすると, 線分 AH を $4:1$ に外分する点は三角形 ABC の外接円上にあることを示せ.

12. 有理数に対して定義され 1 以上の実数値をとる関数 f であって, 任意の有理数 x, y に対して

$$f(x)f(x+y) = f(2x+y) + (f(x)-1)f(y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

13. 7 つの島があり, それらの間に 21 本の橋を架ける. 各橋の通行料は架ける前から定まっており, 1 円から 21 円までの 21 通りである. ある橋の架け方をしたところ, 所持金 n 円の人はどの 2 つの島を選んでも一方の島からもう一方の島へと橋を渡って移動することができるという. このとき n として考えられる最小の値を求めよ.

作問者（協力ありがとう!）

1. 北村　2. 中桐　3. 中山　4. 藏田　5. 北村　6. 福田　7. 中桐　8. 中山　9. 北村
10. 伊藤　11. 中桐　12. 藏田　13. 稲生

この企画は, 毎年大好評, 今年で 18 回目を迎える人気企画である「灘中入試模試」の, 算数だけでなく“数学バージョン”も作ってみたいという部員達の思いを形にしたものです. 和田杯という企画名は灘校在籍時に数研部員でいらっしゃった現校長, 和田孫博先生のお名前をお借りしてつけさせていただきました. 毎年数研には小学生だけでなく, 他校の中高生や大学生, 一般の方にもたくさんお越しいただいております. そこで, 算数の範囲にとどまらず中学以降の数学の知識も持ち合わせていらっしゃる方々と,「灘中入試模試」だけでなく普段部員達が作ってお互いに出し合っているような問題も共有できればなあということでこの企画を始めることになりました. 是非チャレンジしてみて下さい!

最後に, はじめての試みということで色々と苦労することもありましたが, 部員の皆さんの協力のおかげでここに無事企画を完成させることができました. ありがとうございました!

- 採点, 質問は文化祭中は受付まで. 文化祭終了後は郵送かメールでお願いします. お待ちしております!!

  郵送先 (返信用の切手を同封して下さい.)：

  〒658-0082　神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1　灘校数学研究部

  メール先：

  nada_suken@hotmail.com
- 数研のＨＰです. 過去の部誌や入試模試を見ることができます. 是非来てみて下さい!

  http://nadamath2012.web.fc2.com/index.html

文責　高校３年２組３０番　中桐　正人